

Recasages possibles : 102, 106, 155.

Référence : Oraux X-ens Algèbre 2, FRANCINOÙ, GIANELLA, NICOLAS (p. 182-185).

Développement

Proposition 1 Les morphismes de groupes continus de \mathbb{R} dans $GL_n(\mathbb{R})$ sont les applications $t \mapsto e^{tA}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est quelconque.

Corollaire 2 Pour $\theta \in \mathbb{R}$, posons $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et notons \mathbb{S}^1 le groupe des nombres complexes de module 1. Alors, une application $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un morphisme de groupes continu si et seulement s'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ et $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(e^{it}) = Q \begin{pmatrix} R_{tk_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R_{tk_r} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

- *Preuve de la Proposition 1* : Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu. Montrons tout d'abord que ψ est nécessairement dérivable. Pour cela, posons

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto \int_0^x \psi(t) dt. \end{cases}$$

Rappelons que pour une fonction de la variable réelle et à valeurs dans \mathbb{R}^m , on intègre (et on dérive) coordonnées par coordonnées. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $\Psi(x)$ est la matrice dont les composantes sont les $\int_0^x \psi_{ij}(t) dt$ où $\psi(t) = (\psi_{ij}(t))_{i,j \in [1,n]}$. En particulier, d'après le théorème fondamental de l'analyse, Ψ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et on a $\Psi' = \psi$. On a $\Psi'(0) = \psi(0) = I_n$ puisque ψ est un morphisme de groupes. Ainsi, le taux d'accroissement $\frac{\Psi(x) - \Psi(0)}{x} = \frac{\Psi(x)}{x}$ tend vers I_n quand x tend vers 0. Or, $GL_n(\mathbb{R})$ étant ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est l'image réciproque de l'ouvert \mathbb{R}^* de \mathbb{R} par l'application continue $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$), il existe $\eta > 0$ tel

que pour tout $0 < |x| < \eta$, $\frac{\Psi(x)}{x} \in GL_n(\mathbb{R})$, et donc $\Psi(x) \in GL_n(\mathbb{R})$. Fixons donc un $x_0 > 0$ tel que $\Psi(x_0)$ soit inversible. Comme ψ est un morphisme de groupes, on a pour tous $t, u \in \mathbb{R}$, $\psi(t+u) = \psi(t)\psi(u)$ donc en intégrant cette égalité en u sur $[0, x_0]$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{x_0} \psi(t+u) du = \psi(t) \int_0^{x_0} \psi(u) du = \psi(t)\Psi(x_0).$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \int_0^{x_0} \psi(t+u) du \Psi(x_0)^{-1}$ donc il suffit de montrer que $t \mapsto \int_0^{x_0} \psi(t+u) du$ est dérivable pour conclure. Or, un changement de variable donne pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{x_0} \psi(t+u) du = \int_t^{t+x_0} \psi(u) du = \Psi(t+x_0) - \Psi(t),$$

donc g est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et par conséquent, $\psi = g\Psi(x_0)^{-1} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On peut maintenant identifier explicitement ψ . En dérivant par rapport à u l'égalité $\psi(t+u) = \psi(t)\psi(u)$, on obtient pour tous $t, u \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(t+u) = \psi(t)\psi'(u).$$

En évaluant en $u = 0$, et en notant $A = \psi'(0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on voit que ψ est solution de l'équation différentielle linéaire $(E) : y' = yA$, dont les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = Ce^{tA}$, pour $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, si y est solution de (E) , alors l'application $f : t \mapsto y(t)e^{-tA}$ est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = y'(t)e^{-tA} - y(t)Ae^{-tA} = (y'(t) - y(t)A)e^{-tA} = 0.$$

Ainsi, l'application f est constante égale à une matrice C , puis $y(t) = Ce^{tA}$ comme annoncé. Dans le cas de ψ , en évaluant en 0 on trouve $I_n = Ce^{0A} = C$, d'où $\psi(t) = e^{tA}$.

Réciproquement, s'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = e^{tA}$, alors ψ est continu (par continuité de l'exponentielle), et vérifie pour tous $t, u \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t+u) = e^{(t+u)A} = e^{tA+uA} = e^{tA}e^{uA} = \psi(t)\psi(u),$$

puisque tA et uA commutent. Donc ψ est bien un morphisme de groupes continu de \mathbb{R} dans $GL_n(\mathbb{R})$, ce qui conclut la preuve de la **Proposition 1**.

- *Preuve du Corollaire 2* : Soit $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes continu. Posons naturellement ψ l'application définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\psi(t) = \varphi(e^{it})$. Par construction, ψ est un morphisme de groupes continu de \mathbb{R} dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc d'après le **Proposition 2**, il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) = e^{tA}$. Comme l'application $t \mapsto e^{it}$ induit un isomorphisme de groupes $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$, et que ψ induit φ par passage au quotient via cet isomorphisme, il suit que $2\pi\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$. En particulier, on a $e^{2\pi A} = I_n$ (ce que l'on peut plus directement – mais moins conceptuellement – obtenir en remarquant que ψ est 2π -périodique donc $\psi(2\pi) = \psi(0) = I_n$). La décomposition de Dunford implique que sur \mathbb{C} , la diagonalisabilité d'une matrice M est équivalente à celle de e^M , donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $e^{2\pi\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(e^{2\pi A}) = \{1\}$, donc $\lambda \in i\mathbb{Z}$. Comme A est à coefficients réels et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq i\mathbb{Z}$, ses valeurs propres non nulles sont deux à deux conjuguées, ce qui justifie l'existence de $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que

$$A = P \mathrm{Diag}(ik_1, -ik_1, \dots, ik_r, -ik_r, 0, \dots, 0) P^{-1}.$$

On obtient donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA} = P \mathrm{Diag}(e^{itk_1}, e^{-itk_1}, \dots, e^{itk_r}, e^{-itk_r}, 1, \dots, 1) P^{-1}.$$

Remarquons que si $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

Ainsi, si on pose $S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ – dont il est important de noter qu'elle ne dépend pas de θ – et si on considère $T = \mathrm{Diag}(S^{-1}, \dots, S^{-1}, 1, \dots, 1) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA} = (PT) \mathrm{Diag}(R_{tk_1}, \dots, R_{tk_r}, 1, \dots, 1) (PT)^{-1}.$$

Notons $\tilde{Q} = PT \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $M_t = \mathrm{Diag}(R_{tk_1}, \dots, R_{tk_r}, 1, \dots, 1)$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA}\tilde{Q} = \tilde{Q}M_t$ donc en décomposant $\tilde{Q} = \tilde{Q}_1 + i\tilde{Q}_2$, avec $\tilde{Q}_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($i = 1, 2$), puis en identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient

$$e^{tA}\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}_1M_t \quad \text{et} \quad e^{tA}\tilde{Q}_2 = \tilde{Q}_2M_t.$$

En particulier en notant $Q_x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $Q_x = \tilde{Q}_1 + x\tilde{Q}_2$ pour $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{tA}Q_x = Q_xM_t$. Reste à voir qu'il existe

$x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q_{x_0} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. L'application $f : x \mapsto \det(Q_x)$ est polynomiale par propriétés du déterminant, donc ou bien $f \equiv 0$, ou bien l'équation $f = 0$ n'a qu'un nombre fini de solutions. Si on était dans le premier cas, le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ associé à f serait nul, donc son évaluation en i donnerait 0, ce qui n'est pas puisque $\det(\tilde{Q}_1 + i\tilde{Q}_2) = \det(\tilde{Q}) \neq 0$. Ainsi, l'équation $f = 0$ n'a qu'un nombre fini de solutions, et comme \mathbb{R} est infini, on a bien existence d'un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$, i.e. $Q := Q_{x_0} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a alors d'après ce qui précède

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(e^{it}) = e^{tA} = Q \mathrm{Diag}(R_{tk_1}, \dots, R_{tk_r}, 1, \dots, 1) Q^{-1},$$

qui est bien la forme annoncée.

Réciproquement, soit $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(e^{it}) = Q \mathrm{Diag}(R_{tk_1}, \dots, R_{tk_r}, 1, \dots, 1) Q^{-1}.$$

Tout d'abord, φ est bien définie puisque R_θ ne dépend que de la classe de θ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi si $t_1 = t_2 + 2j\pi$ avec $j \in \mathbb{Z}$, alors pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $R_{t_1 k_i} = R_{t_2 k_i}$ et donc $\varphi(e^{it_1}) = \varphi(e^{it_2})$. De plus, si $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$R_{(t_1+t_2)k_i} = R_{t_1 k_i + t_2 k_i} = R_{t_1 k_i} R_{t_2 k_i},$$

donc φ est clairement un morphisme de groupes. Enfin, par continuité des applications \cos et \sin sur \mathbb{C} et par restriction à \mathbb{S}^1 , il est immédiat que φ est continu sur \mathbb{S}^1 , donc on a bien déterminé tous les morphismes continus de \mathbb{S}^1 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ce qui prouve le **Corollaire 2**.

Commentaires et remarques :

- Il me semble suffisant de passer assez vite sur les réciproques (quitte à ne les évoquer qu'à l'oral) afin de plutôt s'attarder sur les raisonnements mis en jeu. La résolution de l'équation différentielle linéaire dans la proposition peut être passée sous silence aussi (même s'il faut bien sûr être capable de la détailler).
- Pour le passage \mathbb{C} -semblables implique \mathbb{R} -semblables pour des matrices réelles, que l'on utilise dans la preuve du corollaire, il faut veiller à ne pas utiliser ce résultat sans plus de précision, parce que l'on veut une matrice de changement de bases $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui soit indépendante de t . Or, pour invoquer ce résultat, il faudrait travailler à t fixé, et on obtiendrait alors une matrice Q potentiellement dépendante de t . On voit bien dans la preuve que si la matrice de changement

de bases complexe est indépendante de t , alors on peut trouver une matrice de changement de bases réelles également indépendante de t , mais ça mérite au moins un argument oral. La référence passe un peu tout ça sous silence (sauf si j'ai raté un argument plus rapide), donc je pense qu'il faut y avoir réfléchi avant de proposer ce développement.

- Pour retrouver la matrice S (qui n'est pas écrite dans le FGN), on peut simplement diagonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice R_θ et observer que la matrice de passage obtenue est bien S (et surtout est indépendante de θ) : notons $E_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ et remarquons déjà que si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors R_θ est scalaire et égale à $E_\theta = \pm I_2$ donc la relation $E_\theta = S^{-1}R_\theta S$ sera vérifiée quelque soit S . Supposons donc $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ de sorte que $\sin(\theta) \neq 0$. Calculons χ_θ le polynôme caractéristique de R_θ :

$$\begin{aligned} \chi_\theta(X) &= \begin{vmatrix} X - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & X - \cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= (X - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) \\ &= ((X - \cos(\theta)) - i \sin(\theta))((X - \cos(\theta)) + i \sin(\theta)) \\ &= (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

Puisque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, χ_θ est scindé à racines simples, R_θ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et est semblable à E_θ . Pour trouver le changement de base, il nous faut déterminer des vecteurs propres. Remarquons que $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{C}^2$ est vecteur propre pour la valeur propre $e^{i\theta}$ si et seulement si $x \in \text{Ker}(R_\theta - e^{i\theta}I_2)$. Or,

$$R_\theta - e^{i\theta}I_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - e^{i\theta} & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) - e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \sin(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -i \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Ainsi, $x \in \text{Ker}(R_\theta - e^{i\theta}I_2) \Leftrightarrow x_1 = ix_2$. Par exemple le vecteur $e_1 = (i, 1)^\top$ convient. De même, on trouve que $e_2 = (1, i)^\top$ est dans $\text{Ker}(R_\theta - e^{-i\theta}I_2)$, donc finalement d'après la formule du changement de bases, en notant S la matrice dont les colonnes sont e_1 et e_2 (*i.e.* S est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^2 vers la base (e_1, e_2)), on a

$$R_\theta = SE_\theta S^{-1} \quad \text{d'où} \quad E_\theta = S^{-1}R_\theta S.$$

- Enfin, on a utilisé le résultat classique selon lequel une matrice est diagonalisable (dans \mathbb{C}) si et seulement si son exponentielle l'est, donc il nous faut le justifier ici. Plus précisément, on utilise le sens réciproque dans notre preuve (le sens direct

étant plus facile à montrer évidemment). Supposons que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit telle que e^M est diagonalisable. Soit $M = D + N$ la décomposition de Dunford de M , c'est-à-dire $D, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, D est diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. Soit $q \geq 1$ l'indice de nilpotence de N , de sorte que

$$e^N = I_n + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{N^k}{k!}.$$

Comme D et N commutent, on a

$$e^M = e^{D+N} = e^D e^N = e^D + e^D \sum_{k=1}^{q-1} \frac{N^k}{k!}.$$

Alors, comme e^M et e^{-D} sont diagonalisables (car D l'est) et commutent (car ce sont des éléments de l'algèbre commutative $\mathbb{C}[M]$), il vient que $e^N = e^{-D}e^M$ est diagonalisable. Or, puisque N est nilpotente, on a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(N) = \{0\}$ et donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(e^N) = \{1\}$. Ainsi, $e^N = I_n$ puis,

$$\sum_{k=1}^{q-1} \frac{N^k}{k!} = 0.$$

On a donc trouvé un polynôme annulateur de N de degré $< q$, ce qui impose $q = 1$ et donc $N = 0$. On obtient bien que $M = D$ est diagonalisable.